

Reader

**Exact Periode 1**

Leerjaar 1

cursusjaar 2017-2018

**Over ThiemeMeulenhoff**

ThiemeMeulenhoff is dé educatieve mediaspecialist en levert educatieve oplossingen voor het Primair Onderwijs, Voortgezet Onderwijs, Middelbaar Beroepsonderwijs en Hoger Onderwijs. Deze oplossingen worden ontwikkeld in nauwe samenwerking met de onderwijsmarkt en dragen bij aan verbeterde leeropbrengsten en individuele talentontwikkeling.

Meer informatie over ThiemeMeulenhoff en een overzicht van onze educatieve oplossingen: www.thiememeulenhoff.nl of via de Klantenservice 088 800 20 16

© ThiemeMeulenhoff, Amersfoort, 2017.

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enig andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voorzoverhetmakenvankopieënuitdezeuitgaveistoegestaanopgrondvanartikel16BAuteurswet1912 j° het Besluit van 23 augustus 1985, Stbl. 471 en artikel 17 Auteurswet 1912, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie (PRO), Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp (www.stichting-pro.nl). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet) dient men zich tot de uitgever te wenden. Voor meer informatie over het gebruik van muziek, film en het maken van kopieën in het onderwijs zie www.auteursrechtenonderwijs.nl.

De uitgever heeft ernaar gestreefd de auteursrechten te regelen volgens de wettelijke bepalingen. Degenen die desondanks menen zekere rechten te kunnen doen gelden, kunnen zich alsnog tot de uitgever wenden.

**3**

**Introductie**

ROC Midden Nederland

Tech College niveau 4, locatie Amersfoort Disketteweg leerjaar 1, periode 1

|  |
| --- |
| **4** |

**5**

**Inhoud**

1. **Wetenschappelijke en technische notatie 7**
   1. Rekenen met machten van 10 7
   2. Drijvende komma notatie 10
   3. Wetenschappelijke notatie 11
   4. Technische notatie 13
2. **Grootheden en eenheden 19**
   1. Meten 19
   2. Grootheden en eenheden 20
   3. SI-stelsel 20
   4. Voorvoegsels 22
   5. Omrekenen van eenheden 24
   6. Exponenten 26
   7. Afgeleide eenheden 28
   8. Berekeningen 28
3. **Lijnen, hoeken en driehoeken 33**
   1. Lijnen en hoeken 33
   2. Driehoeken, som van de hoeken 35
   3. Stelling van Pythagoras 36
   4. Gelijkbenige en gelijkzijdige driehoeken 38
   5. De oppervlakte van een driehoek 41
4. **Vierhoeken 45**
   1. Vierhoeken 45
   2. Oppervlakte en omtrek van rechthoeken en vierkanten 46
   3. Oppervlakte parallellogram, ruit en vlieger 48
   4. Oppervlakte trapezium 50
5. **Dichtheid algemeen 53**
   1. Dichtheid 53
6. **Dichtheid van mengsels en legeringen 59**
   1. Theorie 59
   2. Legeringen 60
   3. Massapercentage en volumepercentage 61
   4. Mengsels 63
   5. Bijvullen 64
7. **Grafisch samenstellen en ontbinden van vectoren 67**
   1. Samenstellen van vectoren met dezelfde werklijn 67
   2. Samenstellen van vectoren die niet eenzelfde werklijn hebben 68
   3. Kop-aan-staartmethode 70
   4. Ontbinden van vectoren 72
   5. Notatie van vectoren 73

**6**

1. **Rekenkundig samenstellen en ontbinden van vectoren 81**
   1. Het ontbinden van vectoren door berekening 81
   2. Samenstellen van vectoren door berekening 86

# 1 Wetenschappelijke entechnische notatie

## 1 Rekenen met machten van 10

Omdat de wetenschappelijke en technische notatie machten van 10 bevatten, besteden we eerst aandacht aan de rekenregels voor machten.

### vermenigvuldigen en delen van machten

Machtsverheffen is een verkorte manier voor het vermenigvuldigen:

10 × × ×10 10 10 = 104 = 10.000

In de macht 104 noemen we 10 het grondtal en 4 de exponent. De exponent geeft het aantal keren aan dat het grondtal met zichzelf vermenigvuldigd is. Als we 10-machten met elkaar vermenigvuldigen, mogen we de exponenten optellen:

103 × 104 = 103 + 4 = 107

Immers: 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 = 107

***vb. 1Bereken***

10.000 × 1.000

***Uitwerking***

10.000 × 1.000 = 104 × 103 = 104 3+ = 107

#### ***Oefeningen***

***1*** Z et om naar 10-macht:

1. 10 × 100 10^1 x 10^2 = 10^3
2. 1.000 × 100 10^3 x 10^2 = 10^5
3. 1.000.000 × 1.000 10^6 x 10^3 = 10^9
4. 10.000 × 100.000 10^4 x 10^5 = 10^9
5. 100 × 10.000 × 1.000.000 10^2 x 10^4 x 10^6 = 10^12

We kunnen dus machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigen door hun exponenten op te tellen. We weten dat delen de omkeerbewerking is van vermenigvuldigen. Ook geldt dat aftrekken de omkeerbewerking van optellen is. We gaan nu bekijken of we machten kunnen delen door de exponenten van elkaar af te trekken.

***vb. 2***10.000 ÷ 1.000

##### Uitwerking

10.000 ÷ 1.000 = 104 ÷ 103 = 104 3− = 101 = 10

#### ***Oefeningen***

***2*** Z et om naar 10-macht:

1. 100 ÷ 10 10^2 / 10^1 = 10^1
2. 1.000 ÷ 100 10^3 / 10^2 = 10^1
3. 1.000.000 ÷ 1.000 10^6 / 10^3 = 10^3
4. 1.000.000 ÷ 10.000 10^6 / 10^4 = 10^2
5. 100.000 ÷ 10.000 × 1.000 10^5 / 10^4 x 10^3 = 10^4

We bekijken nog eens oefening 2e:

105 ÷ 104 × 103 = 105 4 3− + = 104

Bij het optellen en aftrekken van exponenten gelden de gewone voorrangsregels.

Bij machtsverheffen gebruiken we de volgende regels:

› 10*a* × 10*b* = 10*a b*+

› 10*a* ÷ 10*b* = 10*a b*− › (10 )*a b* = 10*a b*× › 100 = 1

› 101*a* = 10−*a*

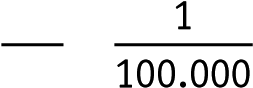
***3*** Z et om naar 10-macht:  ***a***  106 ×103 ÷109 1.000.000 x 1.000/ 1.000.000.000 = 1

1. 10–3 × 105 0.01 x 100.000 = 100
2. 103 ÷1012 ×102 1.000 / 1.000.000.000.000 x 100 = 0.00000001
3. (105 3) × 10–6 100.000.000 x 0.00001 =
4. (103 2) × (102 6)–
5. (102 5) × (105 2)–

***vb. 3***Schrijf de volgende machten eerst als breuk met een 10-macht in de noemer

en vervolgens als gewone breuk:10−5

##### Uitwerking

10−5 = 1015 =

***4*** Schrijf de volgende machten eerst als breuk met een 10-macht in de noemer en vervolgens als gewone breuk:

1. 10–2
2. 10–3
3. 10–1
4. 10–12
5. 10–6
6. 10–9

## 2 DRijvenDe kOmma nOtatie

Als we met onze rekenmachine 287,76 × 456,34 uitrekenen, krijgen we als uitkomst 131.316,3984 . Dat antwoord staat in de zogenaamde **drijvende komma notatie**. Zo kunnen we ook 6 83, ÷ 4.568,76 uitrekenen; de uitkomst hiervan is

0,00149352. Naast de drijvende komma notatie kennen we ook de wetenschappelijke notatie en de technische notatie.

## 3 Wetenschappelijke nOtatie

In de natuurkunde en in de techniek werken we veel met machten van 10 om heel grote en heel kleine getallen weer te geven.

***vb. 4***We willen een groot getal als 468.000.000.000 met een macht van 10 schrijven. Als we in gedachten de komma tussen de 4 en de 6 plaatsen en het aantal cijfers achter de komma tellen, komen we uit op 11. We hebben de komma dus 11 plaatsen naar links geschoven. dit betekent een exponent van +11.

We kunnen het getal 468.000.000.000 daarom noteren als 4 68 10, ⋅ 11 .

Op veel rekenmachines wordt dit weergegeven als 4,68E11.

Zo kunnen we ook heel kleine getallen schrijven met een macht van 10, we nemen als voorbeeld het getal 0,000012.

Als we in gedachten de komma tussen de 1 en de 2 plaatsen en tellen hoeveel plaatsen de komma naar rechts schuift, komen we uit op 5. Dat betekent een exponent van –5 (negatief!).

We kunnen het getal 0,000012 daarom noteren als 1 2, ⋅10–5. De meeste rekenmachines geven dit weer als 1 2, E− 5 .

Deze methode van noteren van heel grote en heel kleine getallen noemen we de wetenschappelijke notatie. We spreken ook wel van de SCI-notatie, afgeleid van het Engels: SCIentific notation.

***vb. 5***We kunnen 1 3, ⋅ 106 × 2 5, ⋅ 10–4 uitrekenen door 1 3, ×2 5, en daarna 106 × 10–4 uit te rekenen.

1 3, ×2 5, = 3 25, en 106 × 10–4 = 106 2− = 104, dus 1 3, × 106 ×2 5, × 10–4 = 3 25, ⋅ 102 .

We kunnen dit ook in één bewerking met de rekenmachine berekenen. Reken machines hebben voor dit doel een speciale toets EE of EXP, afhankelijk van het merk. We moeten dan het volgende intypen: [1 3, ] [6] [2 5, ] [–4] .



***5*** S chrijf de volgende getallen in de wetenschappelijke notatie:

1. 8.500
2. 1.750.000
3. 34.000.000
4. 4.200.000.000
5. 675.000
6. 530.000.000.000

***6*** S chrijf de volgende getallen in de wetenschappelijke notatie:

1. 0,000085
2. 0,00000175
3. 0,00034
4. 0,0042
5. 0,000000675
6. 0,000000000053

***7*** D e snelheid van het licht is 3 0, ⋅108 m/s . Het licht van een ster doet er 3 jaar over om de aarde te bereiken. Hoeveel kilometer is de ster van de aarde verwijderd? Voor het verband tussen de afgelegde weg *s* , de snelheid *v* en de tijd *t* geldt de formule: *s* = *v* ⋅*t* . 2.841E14

## 4 technische nOtatie

Bij de technische notatie worden net als bij de wetenschappelijke notatie getallen met een macht van 10 geschreven. Alleen zijn de exponenten altijd veelvouden van 3, dus van klein naar groot:

10–12,10–9,10–6,10–3,100,103,106,109,1012, ...

Bij de technische notatie kunnen 1, 2 of 3 cijfers voor de komma staan:

0,0000012 = 1 210, · –6 ; 2.750 = 2 7510, · 3

0,000012 = 1210· –6; 27.500 = 27,510· 3

0,00012 = 12010· –6; 275.000 = 27510· 3

De meeste CASIO-rekenmachines hebben een -toets (ENG = ENGineer). Als we daarop klikken wordt, het getal omgezet van de wetenschappelijke notatie in de technische notatie. Als we nogmaals op deze toets klikken, wordt de exponent met 3 verlaagd. Met de combinatie + verhogen we de exponent met 3.



***8*** S chrijf de volgende getallen in de technische notatie:

1. 8.500
2. 1.750.000
3. 34.000.000
4. 4.200.000.000
5. 675.000
6. 530.000.000.000

***9*** S chrijf de volgende getallen in de technische notatie:

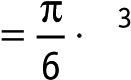
1. 0,000085
2. 0,00000175
3. 0,00034
4. 0,0042
5. 0,000000675
6. 0,000000000053

***10*** S chrijf de volgende getallen eerst in de wetenschappelijke en daarna in de technische notatie:

1. 23.500.000
2. 850.000.000
3. 0,000000097
4. 0,00025

***11*** G eef de uitkomsten van de volgende berekeningen in de technische notatie:  ***a***  3 34 10, ⋅ 11 × 4,56 ⋅108

1. 2 76, ⋅ 1014 × 1,65 ⋅ 10–7
2. 8 21, ⋅ 10–6 × 3,92 ⋅ 10–9
3. E en bolvormige bacterie heeft een diameter van 1 5, ⋅10–5m .

V oor het volume van een bol geldt de formule: *V* *d*

Bereken het volume van de bacterie. Geef de uitkomst zowel in de wetenschappelijke als in de technische notatie.

1. D e diameter van de aarde is 12,8 10⋅ 6 m.
2. Bereken het volume van de aarde. Geef de uitkomst zowel in de wetenschappelijke als in de technische notatie.
3. Hoeveel keer is het volume van de aarde groter dan het volume van de bacterie uit de vorige opgave? Geef de uitkomst zowel in de wetenschappelijke als in de technische notatie.

***14*** M et de Wet van Hooke kunnen we de verlenging berekenen van een draad waaraan getrokken wordt.

De Wet van Hooke luidt: ∆*l* = *F l*⋅

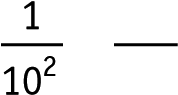
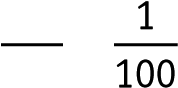
*E* ⋅ *A*

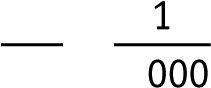
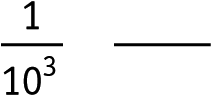
Voor een koperdraad geldt: *l* = 2,0m *F* = 1.900N , *E* = 12410· 9 N/m2 en *A* = 210· –6 2m .

Bereken de verlenging ∆*l* . Geef het antwoord zowel in de drijvende komma notatie, in de wetenschappelijke notatie en in de technische notatie.

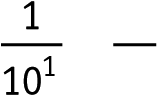
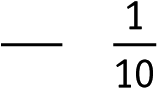
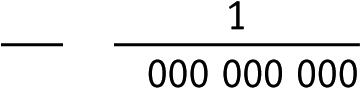
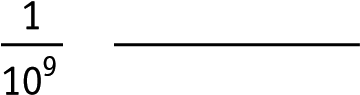
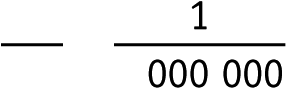
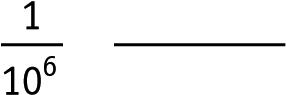
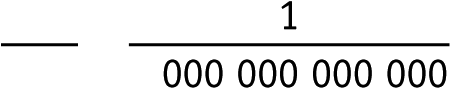
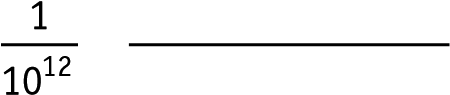
### antwoorden

|  |  |
| --- | --- |
| ***1a*** | 103 |
| ***b*** | 105 |
| ***c*** | 109 |
| ***d*** | 109 |
| ***e*** | 1012 |
| ***2a*** | 10 |
| ***b*** | 10 |
| ***c*** | 103 |
| ***d*** | 102 |
| ***e*** | 104 |
| ***3a b*** | 100 = 1  102 |
| ***c*** | 10–7 |
| ***d*** | 109 |
| ***e*** | 10–6 |
| ***f*** | 100 = 1 |

***4a***   = 

1. =

1.

1.  = 
2. =
   1. . . .
3. =
   1. .
4. =
   1. . .

***5a***  8 5 10, ⋅ 3

1. 1 75 10, ⋅ 6
2. 3 4, ⋅107
3. 4 2, ⋅109
4. 6 75 10, ⋅ 5
5. 5 3, ⋅1011

***6a***  8 5, ⋅ 10–5

1. 1 75 10, ⋅ –6
2. 3 4, ⋅ 10–4
3. 4 2, ⋅ 10–3
4. 6 75 10, ⋅ –7
5. 5 3, ⋅ 10–11

***7*** 2 84 10, ⋅ 13 km

***8a***  8 5 10, ⋅ 3  ***b***  1 75 10, ⋅ 6  ***c***  34⋅106  ***d***  4 2, ⋅109  ***e***  675⋅103  ***f***  530⋅109

***9a***  85⋅ 10–6  ***b***  1 75 10, ⋅ –6  ***c***  340⋅ 10–6  ***d***  4 2, ⋅ 10–3  ***e***  675⋅ 10–9  ***f***  53⋅ 10–12

***10a***  2 35 10, ⋅ 7 ; 23,5 10⋅ 6  ***b***  8 5 10, ⋅ 8 ; 850⋅106  ***c***  9 7, ⋅10–8 ; 97⋅10–9  ***d***  2 5, ⋅10–4 ; 250⋅10–6

***11a***  152,304 ⋅1018  ***b***  45,54 ⋅106  ***c***  32,1832⋅10–15  ***12*** 1 8, ⋅ 10–15 m3

***13a***  1 1, ⋅1021 m3;1 1, ⋅1021 3m  ***b***  6 20 10, ⋅ 35;620 ⋅1033

***14*** 0,01532 = 1,532⋅10−2 m = 15,32⋅10–3 m

Wetenschappelijke en technische notatie

**18**

# 2 Grootheden eneenheden

## 1 Meten

Als we de lengte van een voorwerp willen meten, vergelijken we de lengte van dat voorwerp met de lengte van een meetinstrument, bijvoorbeeld een meetlat. Zie

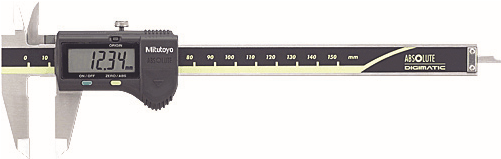
figuur 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

*Figuur 1*

Op de meetlat staan schaalstreepjes met getallen. Op de meetlat stellen de schaalstreepjes centimeters voor. Zie figuur 1. De lengte van het voorwerp kunnen we aflezen op de meetlat. Tussen de schaalstreepjes moeten we schatten. Dit schatten doen we op tienden van schaaldelen. We noteren dan lengte = 9,6cm. Het meetinstrument is bepalend voor de nauwkeurigheid van de meting. Lengtemeetinstrumenten hebben vaak een schaalverdeling in millimeters. De meetwaarde kan dan wat nauwkeuriger opgegeven worden. Bijvoorbeeld lengte = 96, mm5 .

Op de meetlat staan de schaalgetallen in centimeters. Zie figuur 1. In de natuurkunde is het dan de gewoonte om de meetwaarde in die eenheid te noteren. Tussen de millimeterstreepjes is het moeilijk om de tienden te schatten, waardoor meten op 0,1mm nauwkeurig onmogelijk wordt. Willen we dat toch bereiken, dan moeten we een ander meetinstrument gebruiken, bijvoorbeeld een schuifmaat. Met een schuifmaat kunnen we de lengte op 0,1 mm of 0,05 mm nauwkeurig bepalen. Op de afbeelding zien we een elektronische schuifmaat. Zie figuur 2.



*Figuur 2 – Elektronische schuifmaat*

## 2 Grootheden en eenheden

Een eigenschap die we kunnen meten, noemen we in de natuurkunde een grootheid. Een waarde van een grootheid bestaat altijd uit een getal met een eenheid. Voor de aanduiding van grootheden gebruiken we symbolen. Zo is *l* het symbool voor lengte. Grootheden geven we aan met een cursieve (‘*italic*’) letter, eenheden schrijven we met rechte (‘romein’) letters.

Ons meetresultaat noteren we dan als: *l* = 9,6cm; dus grootheid is waarde maal eenheid.

Voor de lengte kunnen we ook andere eenheden gebruiken, zoals millimeter, inch, kilometer en mijl. Millimeter en kilometer hebben dezelfde basis: de meter. De voorvoegsels maken de eenheid 1000 maal zo klein (milli) of 1000 maal zo groot (kilo). De inch en de mijl zijn niet gebaseerd op de meter.

In Nederland is het gebruik van het zogenaamde SI-stelsel van eenheden in 1978 verplicht gesteld. SI staat voor Système International. In het SI-stelsel is de meter (m) de eenheid van lengte. Gebruik van voorvoegsels is daarbij toegestaan, dus mm, cm en km mogen ook.

Behalve de lengte kennen we nog een groot aantal andere grootheden. Voorbeelden daarvan zijn: tijd, massa, snelheid, kracht, druk, vermogen en energie. Elke grootheid heeft zijn eigen SI-eenheid. De grootheid ‘snelheid’ kunnen we samenstellen uit de grootheden afstand en tijd. Snelheid heet daarom een samengestelde grootheid. Basisgrootheden, zoals lengte, tijd en massa, zijn grootheden die we niet kunnen samenstellen uit andere grootheden.

## 3 SI-StelSel

Het SI-stelsel gaat uit van zeven basiseenheden. Zie tabel 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Grootheid* | *Symbool* | *Eenheid* | *Symbool* |
| Lengte | *l* | meter | m |
| Massa | *m* | kilogram | kg |
| Tijd | *t* | seconde | s |
| Elektrische stroomsterkte | *I* | ampère | A |
| Temperatuur | *T* | Kelvin | K |
| Hoeveelheid stof | *n* | mol | mol |
| Lichtsterkte | *l* | candela | cd |

*Tabel 1*

De basiseenheden zijn heel nauwkeurig gedefinieerd. Zo is de meter gedefinieerd als de lengte die het licht in vacuüm aflegt in een tijd van precies 1 /299.792.458seconde. De kilogram is gedefinieerd als de massa van het internationale prototype van de kilogram, een cilinder van platina-iridium. Alle andere eenheden zijn afgeleid van deze basiseenheden en noemen we afgeleide eenheden. In de tabel staat een aantal afgeleide eenheden. Zie tabel 2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Afgeleide grootheid* | *Symbool* | *Afgeleide eenheid* | *Symbool* |
| Oppervlakte | *A* | vierkante meter | m2 |
| Volume | *V* | kubieke meter | m3 |
| Snelheid | *v* | meter per seconde | m/s |
| Versnelling | *a* | meter per seconde kwadraat | m/s2 |
| Dichtheid | ρ | kilogram per kubieke meter | kg/m3 |

*Tabel 2*

Vaak hebben afgeleide eenheden een eigen naam. In de tabel staan voorbeelden. Zie tabel 3.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Afgeleide grootheid* | *Symbool* | *Afgeleide eenheid* | *Symbool* | *Afleiding* |
| Frequentie | *f* | hertz | Hz | s–1 |
| Kracht | *F* | newton | N | kg ⋅ m s⋅ –2 |
| Druk | *p* | pascal | Pa | N/m2 = kg m⋅ –1 ⋅ s–2 |
| Energie, arbeid | *E, W* | joule | J | Nm = kg ⋅ m s2 ⋅ –2 |
| Vermogen | *P* | watt | W | J/s kg m= ⋅ 2 ⋅ s–3 |
| Elektrische lading | *Q* | coulomb | C | A s⋅ |
| Elektrische spanning | *U* | volt | V | W/A = kg m⋅ 2 ⋅s-3 ⋅ A-1 |
| Elektrische weerstand | *R* | ohm | Ω | V/A = kg m⋅ 2 ⋅s–3 ⋅ A–2 |

*Tabel 3*

Naast de SI-eenheden worden nog steeds andere eenheden gebruikt. De tabel geeft een lijst van niet-SI-eenheden waarvan sommige voorlopig zijn toegestaan. Zie tabel 4.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Grootheid* | *Eenheid* | *Symbool* | *SI-waarde* |
| Druk | bar | bar | 105 Pa |
| Energie | kilowattuur | k/wh | 3,6 10 J⋅ 6 |
| Energie | calorie | cal | 4,19J |
| Massa | atomairemassa – eenheid | u | 1,66⋅10–27 kg |
| Temperatuur | graden Celsius | °C |  |
| Tijd | minuut | min | 60s |
| Tijd | uur | h | 3600s |
| Tijd | dag | d | 86400s |
| Volume | liter | l | 1dm3 = 10–3 3m |

*Tabel 4*

Energiebedrijven mogen op hun rekeningen de geleverde energie uitdrukken in kWh. De °C geldt als afgeleide SI-eenheid en mag dus gebruikt worden. De tijdeenheden minuut, uur en dag mogen voorlopig gebruikt worden.

## 4 VoorVoeGSelS

Lengtes kunnen heel groot, maar ook zeer klein zijn. Zo is de diameter van de aarde 12.756.000m groot en de straal van een ijzeratoom 0,000000000128m klein. Om grote en kleine getallen beter leesbaar te maken, kunnen we de getallen wetenschappelijk (SCI van SCIentific) of technisch (ENG van ENGineer) noteren. In de wetenschappelijke notatie schrijven we een waarde als een getal tussen 1 en 10 maal een macht van 10, zoals 1,234 ⋅105. De technische notatie lijkt op de wetenschappelijke notatie, maar de macht van 10 is daarbij een veelvoud van 3, zoals 123,4 10⋅ 3 of 0,1234 ⋅106. Soms zijn deze notaties gelijk. Zo is 1,234 ⋅103 zowel een wetenschappelijke als een technische notatie. Deze notaties kunnen op elke wetenschappelijke rekenmachine eenvoudig worden ingesteld, inclusief het aantal gewenste decimalen.

***Vb. 1***Schrijf de diameter van de aarde en de straal van een ijzeratoom in de wetenschappelijke en de technische notatie.

***Gegeven*** *d* = 12.756.000 m *r* = 0,000000000128 m

***Gevraagd*** *d* in SCI en ENG *r* in SCI en ENG ***Oplossing*** *d* = 1,2756 ⋅107 m (SCI) *d* = 12,756 ⋅106m (ENG) *r* = 1 28 10, ⋅ –10m (SCI) *r* = 128 ⋅10–12m (ENG)

De leesbaarheid kunnen we verder verhogen door gebruik te maken van een voorvoegsel. De technische notatie is daarvoor bij uitstek geschikt. Deze notatie is namelijk, evenals bijna alle voorvoegsels, gebaseerd op machten van 10 waarbij de exponent een veelvoud van 3 is.

De toegestane voorvoegsels staan in een tabel met SI-voorvoegsels. Zie tabel 5.

*Factor Naam Symbool Factor Naam Symbool*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| yotta | Y | 10–24 | yocto |
| zetta | Z | 10–21 | zepto |
| exa | E | 10–18 | atto |
| peta | P | 10–15 | femto |
| tera | T | 10–12 | pico |
| giga | G | 10–9 | nano |
| mega | M | 10–6 | micro |
| kilo | k | 10–3 | milli |
| hecto | h | 10–2 | centi |

1024y 1021z 1018a 1015f

1012p

109n 106µ

103m

102c

101 deca da 10–1 deci d

*Tabel 5*

***Vb. 2***Schrijf de diameter van de aarde en de straal van een ijzeratoom met behulp van voorvoegsels.

***Gegeven*** *d* = 12,756 ⋅106m (ENG) *r* = 128 ⋅10–12m (ENG)

***Gevraagd*** *d* en *r* met voorvoegsels.

***Oplossing***

*d* = 12,756⋅106m = 12,756 Mm *r* = 128 ⋅10–12m = 128pm

### oefeningen

***1*** S chrijf de volgende getallen zowel in de wetenschappelijke als in de technische notatie.

1. 125 .000.000
2. 0,000000125

***2*** Schrijf de volgende waarden met voorvoegsels.  ***a*** 1 25 10 , · 6 m

1. 2 5 , ·10–9 m
2. 35 ·107 m
3. 45·10–7 m

## 5 oMrekenen Van eenheden

Voor het omrekenen van eenheden maken we gebruik van een getallenrechte. Zie figuur 3.

10-12 10-9 10-6 10-3 1 103 106 109

### M G

p

n

m

k

*Figuur 3 – Technische voorvoegsels*

De ‘afstand’ tussen de schaalstrepen is drie nullen of een factor 103.

We nemen als voorbeeld een lengte *l* = 2,0mm. Als we een stap naar rechts doen, wordt de eenheid groter en het getal kleiner. We moeten dan voor elke stap met een factor 10–3 vermenigvuldigen: *l* = 2 0, mm = 2 0, × 10–3 = 2 0, ⋅10–3 m.

Als we een stap naar links doen, wordt de eenheid kleiner en het getal groter. We moeten dan voor elke stap met een factor 103 vermenigvuldigen: *l* = 2 0, mm = 2 0, × 103 = 2 0, ⋅ 103 nm.

Bij de voorvoegsels in de figuur past de technische notatie. Zie figuur 1.

***Vb. 3***3 0, Mm = 3 0, ⋅103 km

1. 2, kg = 5 2, × 103 × 103 mg = 5 2, × (103 2) mg = 5 2, ⋅106 mg
2. 1, mg = 6 1, ⋅10–3 g

70nm =70 × 10–3 × 10–3 ×10–3 × 10–3 km=70 × (10–3 4) =70 10⋅ –12 km

2 5, GW = 2 5, × (103 2) kW= 2 5, ⋅106 kW

Tussen de milli en de kilo gebruiken we een fijnere verdeling, waarbij de ‘afstand’ tussen de schaalstrepen één, nul of een factor 10 is. Zie figuur 4.

10-3 10-2 10-1 1 10 102 103

m c d da h k

*Figuur 4 – Andere voorvoegsels*

In combinatie met deze voorvoegsels kunnen we bij grote en kleine getallen het beste de wetenschappelijke notatie gebruiken.

***Vb. 4***2 1, dam = 2 1, × 10 × 10 = 2 1, ⋅102 dm

3 5, cm = 3 5, ⋅10–5 km

40cl = 40 ⋅10–1 dl = 4 0, dl

67dm = 67 × 102 mm = 6 7, ⋅103 mm ***oefeningen***

***3*** Geef het antwoord van de volgende omrekeningen in de technische notatie.

1. 1 ,2 m = …. µm
2. 25 mg = …. g
3. 250 GW = …. kW
4. 0,0045 g = …. mg

***4*** Geef het antwoord van de volgende omrekeningen in de wetenschappelijke notatie.

1. 2 ,5 dm = …. mm
2. 3 ,5 cm = …. dam
3. 125 cl = …. hl
4. 500 dam = …. m

## 6 exponenten

De figuur toont een vierkant met een oppervlakte van 1dm2. Zie figuur 5. Er geldt dat 1dm = 10cm. De oppervlakte van het vierkant is dan 10cm × 10cm = 102 cm2.

Voor een kubus met een volume van 1dm3 geldt:

1dm3 = 10cm×10cm×10cm = 103cm3.

*Figuur 5 – Vierkant 1 dm² = 100 cm²*

10

0

10

Vaak hebben we te maken met een lengte-eenheid met een exponent zoals km2 (vierkante kilometer) of cm3 (kubieke centimeter). In dat geval moeten we die exponent ook gebruiken bij het omrekenen.

Bijvoorbeeld:

1km = 103m⇒1km2 = (103m)2 = (103 2) m2 = 106m2

1cm = 10–2m⇒1cm3 = (10–2m)3 = (10–2 3) m3 = 10–6m3

### oefeningen

***5*** Reken om:  ***a*** 100 m2 = …. cm2

1. 15 mm2 = …. m2
2. 25 m3 = …. mm3
3. 450mm3 = …. cm3

## 7 afGeleIde eenheden

Eenheden zoals km/h en kWh zijn afgeleide eenheden. Bij het omrekenen gaan we de afzonderlijke eenheden apart omrekenen.

***Vb. 5***N kN N 10–3 kN kN 18 cm2 = ...m2 ⇒ 18 cm2 = 18 × 10–4 2m = 180 m2

km m km 103 m m

60 = ... ⇒ 60 = 60 × = 16,7

h s h 3600 s s

200kWh =...Ws ⇒ 200kWh = 200 × 1000W × 3600s = 720 ⋅106 Ws ***oefeningen 6*** Reken om:

g  ***a*** 11 ,3 3 = …. mkg3 cm

***b***

h

15

m

s

=

….

km

kN  ***c*** m2 mm2

250

=

….

N

***d***  9 0, ⋅107 Ws = …. kWh

## 8 BerekenInGen

In de natuurkunde en de techniek moeten we vaak rekenen. We gebruiken daarbij meestal formules.

***Vb. 6***Een balk heeft een lengte van 1,55m, een breedte van 35, cm4 en een dikte 50mm. Bereken het volume van de balk.

***Gegeven*** *l* = 1,55m

*b* = 35, cm4 *d* = 50mm

***Gevraagd*** *V*

***Oplossing***

*b* = 35, cm4 = 0,354m *d* = 50mm = 0,050m

*V* = *l* ⋅ *b d*⋅ ⇒*V* = 1 55, m × 0,354m × 0,050m = 0,0274m3

In de oplossing hebben we de volgende regels gebruikt:

› We schrijven eerst op wat gegeven is, daarna wat gevraagd wordt en tot slot de oplossing.

› We rekenen eerst alle lengtematen om naar dezelfde standaardeenheid. In dit geval de meter.

› We schrijven de formule op.

› We vullen de gegevens in, mét de eenheden!

› We noteren het antwoord met eenheid, afgerond op 3 significante cijfers.

We moeten eigenlijk afronden op basis van het aantal significante cijfers in de gegevens. Zie hiervoor de wiskundemodule Rekenen. De vuistregel ‘afronden op 3 significante cijfers’ is eenvoudiger en meestal wel correct.

***!* Significante cijfers zijn cijfers die betekenis hebben. De eerste significante cijfers zijn exact. Het laatste significante cijfer is bij meetwaarden geschat en bij berekende waarden afgerond.**

***Vb. 7***De balk uit het vorige voorbeeld heeft een massa van 74kg. Bereken de dichtheid van de balk.

***Gegeven*** *V* = 0,02744m3 *m* = 74, kg0

***Gevraagd*** ρbalk

***Oplossing*** ρ = *mV* ⇒ ρ = 0,7402744,0 kgm3 = 2 70 10, ⋅ 3 kg/m3 In deze oplossing zijn twee nieuwe regels gebruikt:

› We gebruiken een tussenantwoord (*V* uit het vorige voorbeeld) met maximale nauwkeurigheid. Het eenvoudigst gaat dit met de ANS-toets van de rekenmachine. We kunnen een tussenantwoord ook in een geheugenplaats van de rekenmachine opslaan (STO van STOre) en als we het nodig hebben weer terugroepen (RCL van ReCaLl). We noteren een tussenantwoord met vier significante cijfers.

› We maken bij voorkeur gebruik van de wetenschappelijke notatie (SCI) als een antwoord kleiner dan 0,01 of groter dan 1000 is.

### oefeningen

1. Een dunne draad heeft een lengte van 75cm en een diameter (middellijn) van 80µm.  ***a***  Bereken het volume van de draad in kubieke meter.

|  |  |
| --- | --- |
| Bereken het volume van de draad in mm3.  Het volume van een cilinder kunnen we berekenen met de formule *V d* Hierin is *d* de diameter en *l* de lengte. | . |
| Een auto rijdt een afstand van 21, km5 in 18 minuten.  Bereken de gemiddelde snelheid van de auto in m/s. |  |

***b***

1. ***a***

***b***  Bereken de gemiddelde snelheid van de auto in km/h.

***9*** Een schilder verft met de inhoud van een blikje verf van 750ml een oppervlakte van 12m2.

Bereken de dikte in micrometer van de verflaag direct na het aanbrengen.

***antwoorden***

|  |  |
| --- | --- |
| ***1a*** | 1 25 10 , · 8; 125·106 |
| ***b*** | 1 25 10 , · –7; 125·10–9 |
| ***2a*** | 1 ,25Mm |
| ***b*** | 2 ,5µm |
| ***c*** | 350 Mm |
| ***d*** | 4,5µm |
| ***3a*** | 1 2 , ·106 |
| ***b*** | 25 ·10–3 |
| ***c*** | 250 ·106 |
| ***d*** | 4,5 |
| ***4a*** | 2 5 , ·102 |
| ***b*** | 3 5 , ·10–3 |
| ***c*** | 1 25 10 , · –2 |
| ***d*** | 5 10 · 3 |
| ***5a*** | 100 ·104 = 106 |
| ***b*** | 15 ·10–6 |
| ***c*** | 25 ·109 |
| ***d*** | 450·10–3 = 0,450 |
| ***6a*** | 11 , ·3 103 |
| ***b*** | 54 |
| ***c*** | 0 ,250 |
| ***d*** | 25 |
| ***7a*** | 3 7710 , · –9 3m |
| ***b*** | 3 77 , mm3 |
| ***8a*** | 19 , m/s9 |
| ***b*** | 71 , km/h6 |
| ***9*** | 62,5µm |

Grootheden en eenheden

**32**

# 3 Lijnen, hoeken endriehoeken

## 1 Lijnen en hoeken

Bij de eerste drie tekeningen vormen twee lijnen samen een hoek. Zie figuur 1. Een scherpe hoek (∠*A* ) heeft een grootte die tussen 0° en 90° ligt. Een rechte hoek (∠*B* ) is precies 90° en een stompe hoek (∠*C* ) heeft een grootte tussen 90° en 180°. ∠*D* is een gestrekte hoek, deze is precies 180°.

De grootte van een hoek kunnen we opmeten met een geodriehoek of gradenboog.

D

A B C

*Figuur 1 – A B C D*

### oefeningen

***1a***  Bepaal met de geodriehoek de grootte van ∠*A* en ∠*C* . Zie figuur 1.

1. Bepaal met de geodriehoek de grootte van ∠*A*1, ∠*B*1, ∠*B*2, ∠*C*1 , ∠*D*1 en ∠*D*3 .

Zie figuur 2. Schrijf ook op wat voor soort hoek het is.

1

2

1

2

3

1

2

1

2

3

A B C D

*Figuur 2 – A B C D*

1. Bereken de grootte van de hoeken ∠*A*2 , ∠*B*3, ∠*C*2, en ∠*D*2 . Schrijf de berekening op en zeg ook wat voor soort hoek het is.

∠*A*1 en ∠*A*2 zijn samen 180°. Zie figuur 2. Hetzelfde geldt voor ∠ +∠ +∠*B*1 *B*2 *B*3 , ∠ +∠*C*1 *C*2 en ∠ +∠ +∠*D*1 *D*2 *D*3.

Als we daar de gestrekte hoek aan de onderkant van de lijn bijtellen, komen we op 180°+180°=360°. Dit geldt voor alle hoeken rondom één punt. Zo’n hoek noemen we ook wel een volle hoek. De hoeken 1 tot en met 4 zijn samen 360°. Zie figuur 3.

1

2

3

4

\*

\*

*Figuur 3 Figuur 4*

Bij snijdende lijnen zijn de overstaande hoeken gelijk als ze een *X* vormen. de hoeken met een sterretje zijn even groot. Zie figuur 4.

Ook bij evenwijdige lijnen die gesneden worden door een derde lijn komen we gelijke hoeken tegen. Dit kunnen *Z-hoeken* of *F-hoeken* zijn.

De *Z-hoeken* met sterretjes en de *F-hoeken* zijn met rondjes aangegeven. Zie figuur 5. Evenwijdige lijnen kunnen we herkennen aan de pijlen.

\*

\*

\*

\*

*Figuur 5 – A B C D*

***2a*** Controleer door ze op te meten, of de aangegeven *Z-* en *F-hoeken* inderdaad gelijk zijn. Zie figuur 5.

***b***  Controleer door ze op te meten, of alle *overstaande* of *X-hoeken* gelijk zijn.

Zie figuur 5a t/m 5d.

## 2 Driehoeken, som van De hoeken

De som van de hoeken in een driehoek is altijd 180°.

In een willekeurige *ABC* geldt dus: ∠ +∠ +∠ =*A B C* 180°. Als we twee hoeken kennen, kunnen we de derde hoek berekenen.

### vb. 1Gegeven

103

o

?

34

o

A

B

In *ABC* geldt ∠ =*A* 103° en ∠ =*B* 34°. Zie figuur 6.

C

*Figuur 6*

***Gevraagd*** ∠*C* ***Oplossing***

### ∠ =C 180°−∠A−∠B⇒∠C =180°−103°−34°⇒∠ =C 43°

***3*** I n de rechthoekige driehoek geldt dat ∠ =*K* 64° en ∠ =*M* 90°*.* Zie figuur 7.

Bereken ∠*L* .

## 3 steLLing van Pythagoras

De rechthoekige driehoek *KLM* isgetekend. Hierin geldt ∠ =*M* 90°. Zie figuur 7. De schuine zijde *KL* is de langste zijde. De andere twee zijden noemen we rechthoekszijden.

M

rechthoekszijde

rechthoekszijde

K L

schuine zijde

*Figuur 7*

Als twee zijden bekend zijn, kunnen we met de stelling van Pythagoras de derde zijde berekenen:

› In woorden: *rechthoekszijde*12 + *rechthoekszijde*22 = *schuine zijde*2 › In formulevorm: *KM*2 + *LM*2 = *KL*2

Let op: De stelling van Pythagoras mogen we alleen in rechthoekige driehoekengebruiken.

|  |
| --- |
| 2nd |

|  |
| --- |
| ° ’ ’’ |

### vb. 2Gegeven

)

[17]

In dezelfde driehoek geldt *KM* = 17cm en *LM* = 35cm . Zie figuur 7.

***Gevraagd*** *KL*

### Oplossing

De zijde *KL* is de schuine zijde die we kunnen berekenen met de stelling van Pythagoras:

*KL*2 = *KM*2 +*LM*2 ⇒ *KL*2 = (17 cm)2 +(35 cm)2 ⇒ *KL*2 = 289+1225 = 514 ⇒ *KL*= 1514 = 38, cm9

### Conclusie

Die laatste lengte kunnen we ook sneller met onze rekenmachine berekenen. Elke wetenschappelijke rekenmachine bevat namelijk een ingebouwde Pythagoras:

Casio fx-82: POL([17] ,[35] (let op de komma tussen 17 en 35!

TI-30: kiesRPr , [35] ) (let op de komma tussen 17en 35!

Let op: op deze manier kunnen we alleen de schuine zijde van een rechthoekige driehoek berekenen.

***4*** I n een rechthoekige driehoek *ABC* is ∠ =*A* 90°,*AB*= 12cm en *BC* = 13cm .

Zie figuur 8.

C ?

13

A 12 B

*Figuur 8*

1. Bereken de zijde *AC* .
2. Controleer het antwoord in de tekening.

***5*** I n een rechthoekige driehoek *ABC* is ∠ =*B* 90° en ∠ =*C* 62°. *AB*=15cm en

*BC*

=

cm

8

.

***a***

Maak een tekening op schaal.

***b***

Bereken

∠

*A*

*.*

1. Bereken de zijde *AC* .
2. Controleer de antwoorden in de tekening.

***6*** I n een rechthoekige driehoek *ABC* is ∠ =*C* 90° en ∠ =*A* 13°. *AB*=25cm en

*BC*

=

cm

7

.

***a***

Maak een tekening op schaal.

***b***

Bereken

∠

*B*

*.*

1. Bereken de zijde *AC* .
2. Controleer de antwoorden in de tekening.

## 4 geLijkbenige en geLijkzijDige Driehoeken

In een gelijkbenige driehoekzijn twee zijden even lang en zijn de basishoeken even groot. Er is één symmetrieas. Zie figuur 9. Deze symmetrieas verdeelt de gelijkbenige driehoek in twee gelijke rechthoekige driehoeken. De symmetrieas is de deellijn van de tophoek (hier ∠*B*) en deelt de basis loodrecht middendoor.

In een gelijkbenige driehoek is de symmetrieas dus tegelijkertijd:

1. deellijn van de tophoek;
2. zwaartelijn vanuit de tophoek; 3. hoogtelijn vanuit de tophoek;

4. middelloodlijn van de basis.

\*

\*

symmetrieas

C

A

B

*Figuur 9*

In een gelijkzijdige driehoek zijn alle zijden even lang en de drie hoeken even groot: ∠*P* = ∠*Q* = ∠*R* = 60°.

Er zijn drie symmetrieassen. Zie figuur 10. Deze symmetrieassen hebben dezelfde eigenschappen als de symmetrieas van de gelijkbenige driehoek.

1

1

1

12

1

1

1

2

2

2

2

2

2

3

4

5

6

P

U

Z

Q

S

R

T

*Figuur 10*

***7a*** N eem de tekening van figuur 10 over. De symmetrieassen vanuit *P Q*, en*R* zijn

respectievelijk *PS*,*QT* en*RU*. Zet bij het snijpunt van de symmetrieassen de letter *Z* .

1. Welke gelijkbenige driehoeken bevat *PQR* ?
2. Welke rechthoekige driehoeken kun je vinden?
3. Bereken de grootte van alle hoeken.

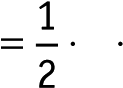
***8*** T egelpatronen komen in allerlei variaties voor. Een stukje van het duale *tegelpatroon van Caïro* is getekend. Zie figuur 11. Duaal betekent in dit verband dat het patroon niet helemaal regelmatig is.

*Figuur 11*

1. Hoeveel gelijkzijdige driehoeken zijn er getekend?
2. Hoeveel zijn er van elke grootte?
3. Hoe groot zijn de hoeken?

## 5 De oPPervLakte van een Driehoek

In een willekeurige driehoek kunnen we de oppervlakte als volgt berekenen: oppervlakte driehoek is halve basis maal hoogte. In formulevorm:

*A* *b h*

C M R

zijde of

hoogte

hoogte

basishoogte

A zijde of basis B KL P zijde of basis Q

*Figuur 12*

Met de hoogte bedoelen we de afstand van het hoekpunt tegenover de zijde die we gebruiken als basis, tot die basis. Zie figuur 12. We spreken ook wel van de hoogtelijn. Bij een rechthoekige driehoek kiezen we één van de rechthoekszijden als hoogtelijn. Bij een stomphoekige driehoek valt de hoogtelijn buiten de driehoek als we hem tekenen vanuit één van de scherpe hoeken.

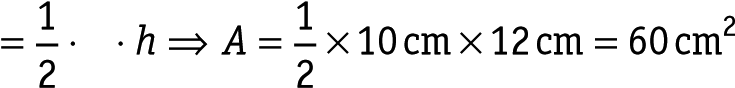
***vb. 1***In figuur 12 zijn in *PQR* de basis en de hoogte bekend. Basis *PQ*= 10cm en de hoogte 12 cm .

Bereken de oppervlakte van de driehoek.

***Gegeven*** *b*= 10cm,*h*= 12cm

***Gevraagd*** *A*

### Oplossing

*A* *b*

1. Z ie figuur 12. *ABC* heeft een basis van 13cm , terwijl de hoogte 9cm is.

Bereken de oppervlakte.

1. D e oppervlakte van *KLM* is 72cm2 , terwijl de basis een lengte heeft van 18cm. Bereken de hoogte.
2. V an *PQR* is bekend dat de basis 7cm is, terwijl de hoogte 6cm is. Bereken de oppervlakte.
3. V an een driehoek is gegeven dat de oppervlakte 18, cm4 2 is, terwijl de hoogte 6,4cm is. Bereken de basis.
4. E en gelijkbenige driehoek *ABC* heeft een tophoek van 22°. De hoogte van deze driehoek is 10, cm4 . De oppervlakte is 17,68cm2.
5. Bereken de grootte van de basishoeken.
6. Bereken de basis.
7. Bereken de lengte van de overige zijden van de driehoek.

### antwoorden

***1a*** 40°;120°  ***b*** 110 ° stomp, ;35° scherp,

90° recht, ;45° scherp,

30° scherp, ;90°,recht  ***c*** 70 ° scherp, ; 55°,scherp

135° stomp, ;60° scherp,

***2a*** Z ie figuur 5a: hoek 4 = hoek 6 Zie figuur 5b: hoek 4 = hoek 6

Zie figuur 5c: hoek 3 = hoek 8 = hoek 12

Zie figuur 5d: hoek 4 = hoek 8  ***b***  Zie figuur 5a: hoek 1 = hoek 3; hoek 2 = hoek 4; hoek 5 = hoek 7 en hoek 6= hoek 8

Zie figuur 5b: hoek 1 = hoek 3; hoek 2 = hoek 4 ; hoek 5 = hoek 7 en hoek 6=hoek 8 Zie figuur 5c: hoek 1 = hoek 4 ; hoek 2 = hoek 3; hoek 5 = hoek 7; hoek 6 = hoek 8 ; hoek 9 = hoek 11 en hoek 10 = hoek 12

Zie figuur 5d: hoek 1 = hoek 3; hoek 2 = hoek 4 ; hoek 5 = hoek 7 en hoek 6 = hoek 8

#### ***3*** ∠ =*L* 26°

***4a*** *AC* = 5

***b***  Zie figuur 7.

***5a***  Tekening  ***b***  ∠ =*A* 28°  ***c***  *AC* =17cm  ***d***  -

***6a*** T ekening  ***b***  ∠ =*B* 77°  ***c***  *AC* =24cm  ***d***  -

***7a*** Z ie tekening.

1

1

1

12

1

1

1

2

2

2

2

2

2

3

4

5

6

P

U

Z

Q

S

R

T

*Figuur 13*

1. *PQZ*, *QRZ*, *PRZ*
2. *PTZ*, *PUZ*, *QSZ*, *QUZ*, *RSZ*, *RTZ*
3. ∠ =∠ =∠ =∠ =∠ =∠ =*P*1 *P*2 *Q*1 *Q*2 *R*1 *R*2 30°

#### ∠ =∠ =∠ =∠ =∠ =∠ =*U*1 *U*2 *S*1 *S*2 *T*1 *T*2 90° ∠ =∠ =∠ =∠ =∠ =∠ =*Z*1 *Z*2 *Z*3 *Z*4 *Z*5 *Z*6 60°

***8a*** 20

1. 18 kleine en 2 grote
2. 60°
3. *A* = 58, cm5 2
4. *h* = 8cm
5. *A* = 21cm2
6. *b* = 5,75 cm

***13a*** b asishoek = 79°

1. *b* = 3,4cm
2. schuine zijde = 10, cm5

# 4 Vierhoeken

## 1 Vierhoeken

A

B

C

D

*Figuur 1*

De hoeken van een vierhoek zijn samen 360°. Dit is gemakkelijk te zien als we in de vierhoek een diagonaal trekken: we krijgen dan twee driehoeken. Zie figuur 1.

Van een driehoek weten we immers dat de som van de hoeken 180° is.

### oefeningen

***1*** R

1

1

1

12

1

1

1

2

2

2

2

2

2

3

4

5

6

P

U

Z

Q

S

T

*Figuur 2*

1. Welke vierhoeken bevat de gelijkzijdige driehoek PQR in figuur 2?
2. Bereken van deze vierhoeken ook de grootte van de hoeken.

We gaan de volgende vierhoeken behandelen:

* 1. rechthoek
  2. vierkant
  3. parallellogram
  4. ruit
  5. vlieger
  6. trapezium

Ingewikkelder figuren kunnen we meestal wel samenstellen uit rechthoeken, driehoeken en parallellogrammen.

We zullen zien hoe we de omtrek en de oppervlakte kunnen berekenen.

## 2 opperVlakte en omtrek Van rechthoeken en Vierkanten

Een rechthoek is een figuur waarbij de twee tegenover elkaar liggende zijden even lang en evenwijdig aan elkaar zijn. Alle hoeken zijn 90°. Zie figuur 3a. De oppervlakte kunnen we berekenen met lengte maal breedte. In formulevorm:

*A* = *l* ⋅ *b*

De omtrek kunnen we berekenen door twee maal de lengte te nemen en twee maal de breedte hierbij op te tellen, in formulevorm: *O* = 2 ⋅ *l* + 2 ⋅ *b*

Een bijzonder soort rechthoek is het *vierkant*: hierbij zijn alle zijden even lang. Zie figuur 3b. Voor het berekenen van de oppervlakte geldt zijde maal zijde, of ook wel de zijde in het kwadraat. In formulevorm: *A z*= 2

De omtrek berekenen we door viermaal de zijde te nemen, in formulevorm:

*O* = 4 ⋅ *z*

DC DC

breedte zijde

A lengte B A zijde B

*Figuur 3 – a. Rechthoek b. Vierkant*

***Vb. 1Gegeven***

Een rechthoek heeft een lengte van 8cm en een breedte van 6cm.

### Gevraagd

1. Bereken de omtrek.
2. Bereken de oppervlakte.

### Oplossing

1. *O* = 2 ⋅ *l* + 2 ⋅ *b* ⇒ *O* = 2 × 8 cm + 2 × 6 cm = 28 cm
2. *A* = *l* ⋅ *b* ⇒ *A* = 8 cm × 6 cm = 48 cm2

### oefeningen

***2*** Een rechthoek heeft een lengte van 12cm en een breedte van 8cm.

1. Bereken de omtrek.
2. Bereken de oppervlakte.

***3*** De oppervlakte van een rechthoek is 49, cm2 2, terwijl de breedte 4,1cm is.  ***a*** Bereken de lengte.

***b*** Bereken de omtrek.

***4*** De omtrek van een rechthoek is 35, cm6 . De breedte is 6,2cm.

1. Bereken de lengte.
2. Bereken de oppervlakte.

***5*** Een vierkant heeft een zijde van 13cm .  ***a*** Bereken de omtrek.

***b*** Bereken de oppervlakte.

***6*** Een vierkant heeft een omtrek van 32, cm8 .

1. Bereken de lengte van de zijde.
2. Bereken de oppervlakte.

***7*** Een vierkant heeft een oppervlakte van 123,21cm2 .

1. Bereken de lengte van de zijde.
2. Bereken de omtrek.

## 3 opperVlakte parallellogram, ruit en Vlieger

Een parallellogram is een vierhoek waarbij de zijden die tegenover elkaar liggen, gelijk en evenwijdig zijn. De overstaande hoeken zijn gelijk. Zie figuur 4a en figuur 4b.

De oppervlakte van een parallellogram berekenen we met basis maal de hoogte. In formulevorm: *A b*= ⋅ *h*

R M

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | P |  | K |
| *Figuur 4 – a. Parallellogram* | *b. Parallellogram* | *c. Ruit* |  |

hoogte C Shoogte

N

Q

D

L

zijde of

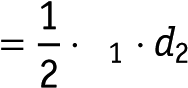
basisdiagonalen

A zijde of basis B

Een ruit is een bijzondere vorm van een parallellogram. Zie figuur 4c:

1. Alle zijden zijn even lang.
2. De diagonalen staan loodrecht op elkaar en delen elkaar doormidden.

De oppervlakte van een ruit kunnen we op twee manieren berekenen:

1. met de formule voor de oppervlakte van een parallellogram;
2. met de formule: *A* *d*

Deze formule kan ook worden gebruikt voor de berekening van de oppervlakte van een vlieger. Ook hier staan de diagonalen loodrecht op elkaar.

### Vb. 2Gegeven

Voor het parallellogram in figuur 4a geldt dat de basis 24cm en de hoogte 4cm is.

***Gevraagd***

Bereken de oppervlakte.

***Oplossing***

*A b*= ⋅ *h* ⇒ *A* = 24cm × 4cm = 96cm2

### oefeningen

1. Voor het parallellogram in figuur 4a geldt dat de basis 12cm en de hoogte 7cm is. Bereken de oppervlakte.
2. Een parallellogram heeft een oppervlakte van 102cm2. De hoogte is 12cm . Bereken de basis.
3. Een parallellogram heeft een oppervlakte van 31,92cm2. De basis is 7,6cm.

Bereken de hoogte.

1. Van een ruit zijn de diagonalen respectievelijk 8cm en 1,2dm lang. Bereken de oppervlakte in cm2.
2. Een vlieger heeft een diagonaal van 24cm en een oppervlakte van 144cm2. Bereken de lengte van de andere diagonaal.
3. Een ruit heeft een oppervlakte van 20 14, cm2. De langste diagonaal is 7,6cm.

Bereken de kortste diagonaal.

## 4 opperVlakte trapezium

Als laatste vierhoek bekijken we het trapezium. Zie figuur 5.

A

B

D

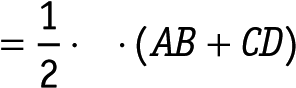
F

*h*

C

*Figuur 5*

De oppervlakte van een trapezium kunnen we berekenen met de formule:

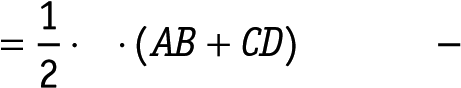
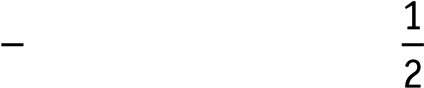
 *A h* ***Vb. 3Gegeven***

Voor het trapezium van figuur 5 geldt: *AB* = 5cm; *CD*= 3cm ; *h* = 4cm

***Gevraagd***

Bereken de oppervlakte.

### Oplossing

*A* *h* ⇒ *A* = × 4 cm × (5 cm + 3 cm) = 16cm2

### oefeningen

1. Voor het trapezium van figuur 5 geldt: *AB* = 6cm; *CD* = 3,1cm; *h* = 3,0cm. Bereken de oppervlakte.
2. Het in figuur 5 weergegeven trapezium heeft een oppervlakte van 15, cm2 2. De hoogte is 3,8cm en *CD* = 2,9cm. Bereken *AB*.
3. De oppervlakte van figuur 5 is 74,75cm2. Verder is gegeven dat *AB* = 14, cm2 en *CD* = 8,8cm.

Bereken de hoogte.

1. De oppervlakte van het trapezium in figuur 5 is 300cm2 . Verder is gegeven dat de hoogte 12cm is en *AB* = 3,2dm. Bereken de lengte *CD*in cm.

### antwoorden

***1a*** *RTZS*;*PTZU* ;*QSZU*

#### ***b*** ∠ =*P* ∠ =*R* ∠ =*Q* 60° ∠ =*T*1 ∠ =*T*2 ∠ =*S*1 ∠ =*U*1 ∠ =*S*2 ∠ =*U*2 90°

∠*Z*1 2, =∠*Z*3 4, =∠*Z*5 6, = 120°

***2a*** 40cm  ***b*** 96cm2

***3a*** 12cm  ***b*** 32,2cm

***4a*** 11, cm6  ***b*** 71,92cm2

***5a*** 52cm  ***b*** 169cm2

***6a*** 8,2cm  ***b*** 67,24cm2

***7a*** 11, cm1  ***b*** 44, cm4  ***8*** 84cm2

1. 8,5cm
2. 4,2cm
3. 48cm2
4. 12cm
5. 5,3cm
6. 13,65cm2
7. 5,1cm  ***16*** 6,5cm

***17*** 18cm

# 5 Dichtheid algemeen

***1 DichtheiD***

Niet alle voorwerpen van hetzelfde materiaal hebben dezelfde massa. Hoe groter het volume van het voorwerp, hoe groter de massa.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Grootheid* | *Eenheid* | *Symbool* | *Meetwaarden* | |  |  |  |
| *massa* | g | *m* | 125 | 195 | 280 | 380 | 500 |
| *volume* | cm3 | *V* | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 |
| *dichtheid* | g/cm3 | ρ *= m/V* | 7,8 | 7,8 | 7,8 | 7,8 | 7,8 |

*Tabel 1 – Massa en volume van staalblokjes*

In de tabel staan de meetresultaten van een experiment waarbij we de massa en het volume van een aantal staalblokjes hebben gemeten. Zie tabel 1. We zien in de tabel dat het quotiënt van massa en volume steeds dezelfde waarde 7,8 g/cm3 oplevert. Dit betekent dat massa en volume evenredig zijn. De evenredigheidsconstante noemen we de dichtheid, met symbool ρ . ρ is de Griekse letter rho. Voor de dichtheid geldt de formule:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ρ= *m*  *V* |  | (1) |
| ρ de dichtheid | kg/m3 |  |
| *m* de massa | kg |  |
| *V* het volume | m3 |  |

In het voorbeeld is de eenheid van dichtheid g/cm3 . In het SI-stelsel is de eenheid van massa kg en de eenheid van volume m3. De SI-eenheid van dichtheid is dan kg/m3 . Andere eenheden die we kunnen tegenkomen zijn g/cm3 (=g/ml) en kg/dm3 (=kg/l).

Verschillende materialen hebben verschillende dichtheden. Waarden daarvoor kunnen we vinden in een tabellenboek. In een tabellenboek staat meestal bovenaan de tabel welke eenheid gebruikt is. Als boven aan de tabel ‘×103 kg/m3’ staat, moeten we alle tabelwaarden vermenigvuldigen met 103 . De dichtheid van aluminium is bijvoorbeeld 2 70 10, ⋅ 3 kg/m3.

We kunnen formule 1 ook in een andere vorm schrijven:

|  |  |
| --- | --- |
| *m* = ρ ⋅*V* | (2) |

Deze vorm is erg handig als we de massa moeten uitrekenen van een voorwerp waarvan we het volume kennen. Deze formule bestaat ook in een uitgebreidere vorm wanneer het gaat om gassen en dampen, de zogenaamde massaformule.

***!* › V roeger noemden we de dichtheid soortelijke massa of soortelijk gewicht.**

**› D e dichtheid hangt af van de temperatuur. Dat komt doordat het volume verandert als de temperatuur verandert. In de meeste tabellenboeken wordt de dichtheid van vaste stoffen en vloeistoffen gegeven bij 288 K (15 °C). Bij gassen, en in mindere mate bij vloeistoffen, is de dichtheid ook nog afhankelijk van de druk. › is ook het symbool voor soortelijke weerstand.**

***Vb. 1***Druk de dichtheid van aluminium uit in g/cm3 en in kg/dm3 .

***Gegeven*** ρaluminium = 2 70 10, ⋅ 3 kg/m3 (Zie tabellenboek.)

***Gevraagd*** ρaluminium = ... g/cm3 ρaluminium = ... kg/dm3

***Oplossing***ρ kg 3 × 106 3 g = 2 7, 0 g

3 = 2,70 ⋅10

aluminium = 2 70 10, ⋅ m3 10 cm3 cm3

ρaluminium = 2 70 10, ⋅ 3 mkg = 2,70 ⋅103 × 13 kgdm3 = 2 70, dmkg3

3 10

***Vb. 2***Een metalen staaf heeft een volume van 0,035 m3 en een massa van 300 kg.

Van welk metaal zou de staaf gemaakt kunnen zijn?

***Gegeven*** *m* = 300 kg *V* = 0,035 m3

***Gevraagd*** Welk metaal?

***Oplossing***

Om deze vraag te kunnen beantwoorden, berekenen we eerst de dichtheid van het metaal. Daarna zoeken we in een tabel op welk metaal die dichtheid heeft.  ρ = *mV* ⇒ ρ = 0,300035kgm3 = 8571 kg/m3 = 8 6, ⋅103 kg/m3

De tabelwaarde die hier het dichtst bij ligt, is de dichtheid van nikkel: 8 5, ⋅103 kg/m3 . De staaf is dus waarschijnlijk van nikkel gemaakt.

***Vb. 3***Bereken de massa van een messing plaat met een lengte van 2000 mm, een breedte van 700mm en een dikte van 4 mm.

***Gegeven*** *l* = 2000 mm, *b* = 700 mm, *d* = 4 mm

ρmessing = 8 4, ⋅103 kg/m3 (Zie tabellenboek.)

***Gevraagd*** *m*

***Oplossing***

In de techniek is het gebruikelijk om lengtematen op te geven in millimeter. Omdat in tabellenboeken de dichtheid in kg/m3 wordt gegeven, moeten we de lengtematen eerst omrekenen naar meter.

*l* = 2000 mm = 2,000 m , *b* = 700 mm = 0,700 m , *d* = 4 mm = 0,004 m *V* = *l* ⋅ *b d*⋅ ⇒ *V* = 2,000 m × 0,700 m × 0,004 m = 0,0056 m3 *m* = ρ ⋅*V* ⇒ *m* = 8 4, ⋅103 kg/m3 × 0,0056 m3 = 47 kg

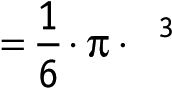
## Oefeningen

1. Zoek in je tabellenboek de dichtheden op van aluminium, goud, benzine en lucht. Noteer ook bij welke temperatuur en druk (voor lucht) deze dichtheden gelden.
2. E en staaf kunststof heeft een volume van 500 cm3 en een massa van 600 g. Bereken de dichtheid van de kunststof in kg/m3 .
3. Een stalen plaat heeft een lengte van 2500mm , een breedte van 1250mm en een dikte van 3mm .

Volgens de Arbowet mogen we maximaal 25 kg zonder hulpmiddelen tillen. Mag je deze plaat met 2 personen zonder hulpmiddelen tillen?

1. Een vloeistof heeft een volume van 25 ml en een massa van 21 g . Bereken de dichtheid van de vloeistof in kg/m3 .
2. Een koperen bol met een diameter (middellijn) van 24 cm heeft een massa van 50 kg.

Is de bol massief?

 Het volume van een bol kunnen we berekenen met de formule *V d* .

1. Een messing plaat heeft een massa van 20 kg. Bereken het volume van de plaat.
2. Bij een bedrijf wordt een lading staalplaten afgeleverd. De platen van 2 m ×1 m zijn 30 mm dik. De leverancier heeft ze per 10 platen op een pallet gebundeld. We vragen ons af of de beschikbare heftruck met een hefvermogen van 2500 kg deze platen kan lossen.
3. Bereken de massa van de staalplaten.
4. Kan de heftruck de pallet met staalplaten lossen?

### Antwoorden

1. Aluminium: 2 7, ⋅103 kg/m3(288 K) Goud: 19,3×103 kg/m3 (288 K)

Benzine: 0 72 10, ⋅ 3 kg/m3(288 K)

Lucht: 1 29, kg/m3(273 K, 101,3 kPa)

1. 1200kg/m3
2. De plaat weegt 73, kg1 . Je mag deze plaat niet met twee personen zonder hulpmiddelen tillen.
3. 840 kg/m3
4. De bol is niet massief.
5. 2 38 10, ⋅ –3 3m

***7a*** 4740 kg

***b*** De heftruck kan de pallet met staalplaten niet lossen.

# 6 Dichtheid vanmengsels en legeringen

## 1 Theorie

Als we verschillende stoffen mengen, ontstaat een mengsel. Bij metalen spreken we van een legering. Na het mengen is de totale massa gelijk aan de som van de massa’s van de afzonderlijke bestanddelen. Het totale volume is echter vaak kleiner dan de som van de afzonderlijke volumes. Als we zand en grind mengen, zullen de fijnere zandkorrels geheel of gedeeltelijk de ruimte tussen de grindstenen opvullen. Het figuur toont een voorbeeld van dat effect. Zie figuur 1. Bij kleine hoeveelheden zand is totale volume gelijk aan het volume van het grind. De zandkorrels passen nog in de vrije ruimtes tussen de grindstenen. Bij grotere hoeveelheden zand zal het volume wel groter worden, maar nooit gelijk aan de som van de oorspronkelijke volumes.

Als we 100 ml water mengen met 100 ml alcohol is het totale volume kleiner dan 200 ml. Bij het mengen gebruiken de kleinere watermoleculen gedeeltelijk de vrije ruimte tussen de grotere alcoholmoleculen. Het totale volume is hierdoor kleiner dan de som van de afzonderlijke volumes. We noemen dat verschijnsel volumecontractie.

*Figuur 1 – Mengen van grote en kleine deeltjes*

We kunnen de dichtheid ρ van een mengsel berekenen met de formule:

ρ= *m*totaal

*V*totaal

Hierin is *m*totaal de totale massa van het mengsel en *V*totaal het totale volume. Als we opvuleffecten en volumecontractie verwaarlozen, is het totale volume gelijk aan de som van de volumes van de verschillende bestanddelen. Voor de dichtheid geldt dan de formule:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ρ= Σ*m*  Σ*V* |  |  | (1) |

Hierin is Σ*m* de som van de massa’s van de bestanddelen in kg en Σ*V* de som van de volumes van de bestanddelen in m3. Σ (Griekse hoofdletter sigma) is het gebruikelijke symbool voor een sommatie. In dit onderwerp zullen we vaak de massa in gram uitdrukken en het volume in cm3 of liter (1 liter = 1 dm3).

De volgende omrekeningen komen regelmatig voor:

1 g = 1 ⋅10–3 kg

1 cm3 = 1 ⋅10–6 m3

1 liter = 1 dm3 = 1 10⋅ –3 m3.

## 2 Legeringen

***Vb. 1***We maken een legering van 60 g koper en 30 g zink.

Bereken de dichtheid van de legering.

***Gegeven*** *m*koper = 60 g; *m*zink = 30 g

ρkoper = 8 9, ⋅103 kg/m3 (zie tabellenboek); ρzink = 7 2, ⋅103 kg/m3 (zie tabel-

lenboek)

***Gevraagd*** ρlegering

***Oplossing*** ρkoper = 8 9, ⋅103 kg/m3 = 8 9, g/cm3 ; ρzink = 7 2, ⋅103 kg/m3 = 7 2, g/cm3

ρkoper *m*koper ⇒ 8 9, g/cm3 = 60 g ⇒ *V*koper = 60 = 6 74, cm3 =

*V*koper *V*koper 8 9,

ρzink = *m*zink ⇒ 7 2, g/cm3 = 30 g ⇒ *V*zink = 30 = 4 17, cm3

*V*zink *V*zink 7,2

Σ*m m*= koper +*m*zink ⇒*m*legering = 60 g+30 g = 90 g

Σ*V V*= koper +*V*zink ⇒*V*totaal = 6 74, cm3 + 4,17 cm3 = 10,91 cm3

ρlegering =Σ*m*= 90 g = 8 25, g/cm3

Σ*V* 10,91 cm3

### oefeningen

1. We maken een legering van 100 g zilver en 200 g tin. Bereken de dichtheid van deze legering.
2. We mengen 1,0 liter aceton met 1,5 liter water.

Bereken de dichtheid van het mengsel in kg/dm3. Neem aan dat er geen volumecontractie optreedt.

## 3 MassapercenTage en VoLuMepercenTage

Om de samenstelling van mengsels en legeringen aan te geven gebruiken we in de praktijk regelmatig de grootheden massapercentage en volumepercentage. Het massapercentage van een bestanddeel kunnen we berekenen met de formule:

*massa*% = *m*bestanddeel ×100%

Σ*m*

Het volumepercentage berekenen we met de formule:

*volume*% = *V*bestanddeel ×100% Σ*V*

***Vb. 2***We maken een legering van 80 g koper en 40 g zink.

Bereken het volumepercentage zink in deze legering.

***Gegeven*** *m*koper = 80 g; *m*zink = 40 g

ρkoper = 8 9, ⋅103 kg/m3 ; ρzink = 7 2, ⋅103 kg/m3

***Gevraagd***

Volumepercentage zink

***Oplossing*** ρkoper = 8 9, ⋅103 kg/m3 = 8 9, g/cm3 ; ρzink = 7 2, ⋅103 kg/m3 = 7 2, g/cm3

ρkoper = *m*koper ⇒ 8 9, g/cm3 = 80 g ⇒ *V*koper = 80 = 8 99, cm3

*V*koper *V*koper 8 9,

ρzink = *m*zink ⇒ 7 2, g/cm3 = 40 g ⇒ *V*zink = 40 = 5 56, cm3

*V*zink *V*zink 7,2

Σ*V V*= koper +*V*zink ⇒ Σ*V* = 8 99, cm3 + 5,56 cm3 = 14,55 cm3

*volume*% = *V*Σzink*V* ×100%⇒ *volume*% = 5 56, cm33 ×100% = 38,2% 14,55 cm

***3*** We legeren 50 g goud met 100 g zilver.  ***a***  Bereken het massapercentage goud in deze legering.

***b***  Bereken het volumepercentage goud in deze legering.

***4*** In een lood-zinklegering is het massapercentage zink 27%. Bereken de dichtheid van deze legering.

Aanwijzing: ga uit van 100 gram legering.

## 4 MengseLs

***Vb. 3***Accuzuur is een mengsel van de vloeistoffen zwavelzuur en water. De dichtheid van accuzuur is 1,28 kg/liter.

Bereken hoeveel liter zwavelzuur we toe moeten voegen aan een liter water om accuzuur te krijgen.

De dichtheid van zwavelzuur is 1,8 kg/liter . Neem aan dat er bij het mengen geen volumecontractie optreedt.

***Gegeven***

*V*water = 1 liter ρaccuzuur = 1,28 kg/liter ; ρzwavelzuur = 1,8 kg/liter ; ρwater = 1 kg/liter

***Gevraagd***

*V*zwavelzuur

***Oplossing*** *m*water = ρwater ⋅*V*water ⇒ *m*water = 1 kg/liter ×1 liter = 1 kg

*m*zwavelzuur =ρzwavelzuur⋅*V*zwavelzuur ⇒ *m*zwavelzuur = 1 8, kg/liter ×*V*zwavelzuur = 1 8, ×*V*zwavelzuur

Σ*m* = 1 +1,8 ×*V*zwavelzuur

Σ*V* = 1 +*V*zwavelzuur

ρaccuzuur = Σ*m*⇒ 1 28, = 1+1,8 ×*V*zwavelzuur ⇒

Σ*V* 1+*V*zwavelzuur

1 28, +1,28×*V*zwavelzuur = +1 1,8 ×*V*zwavelzuur ⇒

1 28, − =1 1 8, ×*V*zwavelzuur −1 28, ×*V*zwavelzuur ⇒ 0,28 = 0,52×*V*zwavelzuur ⇒

= 0 28, = 0,538 liter

*V*zwavelzuur

0 52,

1. Spiritus is een mengsel van alcohol en water. Het volumepercentage alcohol in spiritus is 80%.

Bereken de dichtheid van spiritus in kg/dm3.

1. W e willen een mengsel van aceton en water maken met een dichtheid van 0,92 kg/liter. We hebben 1,0 liter aceton.

Bereken hoeveel dm3 water we hier aan moeten toevoegen.

## 5 BijVuLLen

***Vb. 4***We vullen een emmer met een inhoud van 10 liter tot de rand met grind met een dichtheid van 1 8, ⋅103 kg/m3. Er zit dan 12 kg grind in de emmer. Bereken hoeveel liter water in de emmer gegoten kan worden tot de emmer precies vol is.

***Gegeven***

Σ*V* = 10 liter ρgrind = 1 8, ⋅103 kg/m3

*m*grind = 12 kg

***Gevraagd***

*V*water

***Oplossing***  10 liter = 10 dm3

ρgrind = 1 8, ⋅103 kg/m3 = 1 8, kg/dm3

ρgrind = *m*grind ⇒ 1 8, kg/dm3 = 12 kg ⇒ *V*grind = 12 = 6 67, dm3

*V*grind *V*grind 1 8,

Σ*V V*= grind +*V*water ⇒ 10 dm3 = 6 67, dm3 +*V*water ⇒

*V*water = 10 dm3 −6 67, dm3 = 3,33 dm3 = 3 33, liter

1. We mengen 10 kg grind met 2 liter water en zand. Het mengsel vult alle ruimte op in een emmer van 10 liter.

Bereken hoeveel kg zand we hebben toegevoegd.

De dichtheid van grind is 1 8, kg/dm3, van water 1 kg/dm3 en van zand 1 6, kg/dm3

.

1. We mengen 2,7 kg stalen fietskogeltjes met 1,0 kg glazen knikkers. Na enig schudden past het geheel in een emmertje van 1,00 liter.

Bereken hoeveel procent van de ruimte in het emmertje nog leeg is.

### antwoorden

1. 8 13, g/cm3 = 8,13 ⋅103 kg/m3
2. 0,916 kg/dm3

***3a*** 33 , %3  ***b***  78, %6

1. 9 82 10, ⋅ 3 kg/m3
2. 0 84, kg/dm3
3. 1 63, dm3
4. 2,13 kg
5. 0,247 dm3

# 7 Grafischsamenstellen en ontbinden van vectoren

## 1 SamenStellen van vectoren met dezelfde werklijn

Vectoren stellen in de praktijk *grootheden* voor zoals: krachten, snelheden, spanningen en stromen. Een vector geef je aan met een pijltje naar rechts boven het symbool. 

Twee vectoren *a* en *b* zijn getekend langs dezelfde werklijn. Zie figuur 1. Vector  *c* is evenwijdig aan de vectoren *a* en *b* , en heeft dezelfde richting. We zeggen dan dat *a* , *b* en *c* *gelijkgericht* zijn. 

Vector *d* is ook evenwijdig aan *a* en *b* , maar *tegengesteldgericht*.

*d*

*c*

werklijn

*b*

*a*

*Figuur 1 – Gelijkgerichte en tegengestelde vectoren*

Wanneer twee vectoren dezelfde werklijn hebben, kunnen we de vectoren optellen of aftrekken. In de volgende figuren zijn de somvector *v*= +*a b* en de verschilvector *w c*= −*b* getekend. Zie figuur 2 en figuur 3. De som- of verschilvector noemen we de resultante.

*b*

*a*

*v*

*Figuur 2 – Resultante van vectoren*

*c*

*w*

*-*

*b*

*Figuur 3*

Alle vectoren zijn op schaal getekend.

### oefeningen



***1*** B epaal de grootte van *a* , *b* , *c* en *d* in mm . Zie figuur 1. *a*= mm ; *b*= mm ; *c*= mm ; *d*= mm .

Bepaal de grootte van *v* en *w* in mm . Zie figuur 2 en 3. *v*= mm ; *w*= mm .

## 2 SamenStellen van vectoren die niet eenzelfde werklijn hebben

Twee vectoren die niet eenzelfde werklijn hebben, kunnen we ook samenstellen. Dit kunnen we grafisch doen met behulp van de parallellogrammethode. De vectoren *a* en *b* grijpen aan in punt *A*. Dit punt noemen we het *aangrijpingspunt*. Ook de resultante *c* grijpt aan in dit punt.

Dit samenstellen wordt ook wel grafisch optellen van vectoren genoemd. We teke- nen een parallellogram *ABCD*, waarbij *AB* = *DC =* *a* en *AD* = *BC* = *b* .

*b*

*a*

A

B

D

C

*Figuur 4 – Aangrijpingspunt van vectoren*

De resultante *c* van de optelling van *a* en *b* is de diagonaal *AC* van het parallellogram. Zie figuur 5. Als we de lengte van de vector opmeten en vermenigvuldigen met het verhoudingsgetal van een gegeven schaal, kunnen we de grootte van de resulterende vector *c* bepalen.

*b*

*a*

*c*

A

B

D

C

*Figuur 5 – Resultante van twee vectoren*

Wanneer we twee vectoren van elkaar af moet trekken, kunnen we de methode van grafisch optellen met een kleine aanpassing toepassen. De aanpak voor de verschilvector *v a*= −*b* is getekend. Zie figuur 6, 7, 8 en 9.

*b*

*a*

*Figuur 6*

*b*

-

*b*

*a*

*Figuur 7*

*b*

-

*b*

*a*

*Figuur 8*

*b*

-

*b*

*a*

*v*

*Figuur 9*

### oefeningen

***2*** S chrijf bij elke tekening wat je per stap moet doen. Zie figuur 6, 7, 8 en 9.

Je noemt dit dan een stappenplan voor het grafisch aftrekken van twee vectoren.

## 3 kop-aan-Staartmethode

Als we meer dan twee vectoren moeten optellen en/of aftrekken, is de kop-aanstaartmethodedeze methode is de resultante handiger omdat we dan minder lijnen krijgen. Zie figuur 10. Met *v* getekend, waarvoor geldt: *v*= +*a b c*+. Zie figuur 11.

*b*

*a*

40

o

38

o

*c*

*Figuur 10 – Optellen meer vectoren*

*b*

*c*

*v*

*a*

*Figuur 11 – Kop-aan-staartmethode*

### oefeningen

***3a*** T eken de resultante *v* met de parallellogrammethode.

1. Meet de lengte van de resultante *v* .

1. Leg uit wat de overeenkomst is tussen de parallellogrammethode en de kop-aanstaartmethode.



***4*** D e vectoren *a* , *b* en *c* zijn getekend. Zie figuur 12.

*b*

*a*

*c*

A

*Figuur 12 – Drie vectoren*

Bepaal grafisch de grootte van de resultante van de volgende vectoren: *v*= +*a c* *v* = mm

= −*a b* *v* = mm

*v*

= +*a b c*+ *v* = mm

*v*

= −*a b c*+ *v* = mm

*v*

= +*a b c*− *v* = mm

*v*



1. T eken de resultante *c* van *a* + *b* . Zie figuur 13.

*b*

*a*

45

o

*Figuur 13 – Optellen van twee vectoren*



1. Teken de resultante *c* van *a* + *b* . Zie figuur 14.

*b*

*a*

120

o

*Figuur 14 – Resultante van twee vectoren*

## 4 ontbinden van vectoren

Hiervoor hebben we vectoren samengesteld. Wanneer we een gegeven vector heb- ben, kunnen we die ook ontbinden in twee vectoren *a* en *b* die hetzelfde aangrijpingspunt hebben. De gegeven vector *c* is dan de diagonaal van een parallello- gram waarvan *a* en *b* de zijden zijn. Zie figuur 15. Van de vectoren *a* en *b* moeten dan wel de werklijnen gegeven zijn.

*b*

*c*

*a*

A

*Figuur 15 – Ontbinden van vectoren*

### oefeningen

***7*** E en vector die beschouwd kan worden als de resultante van twee vectoren *a* en *b* is getekend. Zie figuur 16. De werklijnen zijn gestippeld weergegeven: *a* is horizontaal naar rechts gericht, *b* verticaal naar boven.

*b*

*c*

*a*

A

*Figuur 16 – Vector ontbinden*

Ontbind vector *c* in de vectoren *a* en *b* . Zie figuur 21. Schrijf je aanpak op.

Bepaal de grootte van *a* en *b* .

## 5 notatie van vectoren

Een vector kun je als volgt noteren:

= (30,35°) *c*

Dit betekent dat de lengte van de vector 30 mm is en dat de vector een hoek van

35° maakt met de positieve *x*-as. De hoek is positief als hij tegen de wijzers van de klok in draait. Zie figuur 17.*c*= (28,–55°) is getekend**.** Zie figuur 18.

*c*

35

o

A

*c*

-

55

o

A

*Figuur 17* *Figuur 18*

### oefeningen

***8*** 2)G egeven zijn de volgende drie vectoren:1) *cc*== ((2125,,–6830°)°)

3) *c*= (20,0°)

Voer de volgende opdrachten uit voor de drie vectoren:

1. Teken vector *c* volgens de gegeven grootte en richting.
2. Ontbind de vector *c* in de vectoren *a* en *b* volgens horizontale en verticale werklijnen. 

***c***

Bepaal de grootte van

*a*

en

*b*

in

mm

.

1. O ntbind vector *c* in een horizontale component *a* en verticale component *b* . Zie figuur 19.

*c*

45

o

*Figuur 19*

Bepaal de grootte van deze componenten als geldt dat 1 cm 5 A .

= A ; *b*= A .

*a*

1. Ontbind de vectoren *a* en *b* in horizontale en verticale componenten. Zie figuur 20.

*b*

*a*

45

o

30

o

*Figuur 20*

1 cm 20 V

1. Bepaal deze horizontale en verticale componenten:

= V *a*h

= V *a*v

*b*h = V

*b*v = V

1. Tel de verticale componenten bij elkaar op.

Verticaal = V.

1. Tel de horizontale componenten bij elkaar op.

Horizontaal = V.

1. Teken de horizontale en verticale resultante volgens de parallellogrammethode. Zie figuur 21. Bepaal de grootte van de resultante *c* .

= V *c*

*b*

*a*

45

o

30

o

*Figuur 21*

### antwoorden

***1a*** 40  ***b***  25  ***c***  55

***d***  45  ***e***  65

***f***  30

***2*** ***Stappenplan***

***Stap 1*** Teken de vectoren.

***Stap 2*** Teken vector –*b*

***Stap 3*** Teken met *a* en –*b* een parallellogram.

***Stap 4*** Teken de resultante *v* in het parallellogram.

***3a*** Z ie figuur.

40

°

38

°

*→*

*b*

*→*

*c*

*→*

*a*

*→*

*v*

*Figuur 22*

= 57 mm

1. *v*
2. Bij de kop-aan-staartmethode worden de vectoren verschoven over de zijden van het parallellogram.

***4a***  11

1. 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***6*** | *Figuur 23* Z ie figuur. | *b* |

1. 17,5  ***d***  4,5  ***e***  10,5 ***5*** Z ie figuur.

45

°

*→*

*→*

*b*

*→*

*a*

*→*

*c*

120

°

*→*

*b*

*b*

*→*

*a*

*→*

*c*

*Figuur 24*

***7*** *a*= 50 mm ; *b*= 20 mm  ***8a***  Zie figuur.

*→*

*b*

*→*

*c*

*→*

*a*

*Figuur 25*

*→*

1. *= 10*

*→*

1. *= 23*
2. Zie figuur.

*→*

*b*

*→*

*c*

*→*

*a*

*Figuur 26*

*→*

* 1. *= 18*

*→*

* 1. *= -10*

1. Zie figuur.

*→*

*c =*

*→*

*a*

*Figuur 27*

*→*

* 1. *= 20*

***9*** 17, A5 ; 17, A5

***10a*** 90

50

56 56

1. 106
2. 146
3. 170

# 8 Rekenkundigsamenstellen en ontbinden van vectoren

## 1 Het ontbinden van vectoren door berekening

Bij het grafisch samenstellen en ontbinden van vectoren ontbinden we een vector *c* langs gegeven werklijnen in twee krachten *a* en *b*. Met behulp van een liniaal kunnen we dan de grootte van *a* en *b* opmeten. Hier gaan we vectoren ontbinden in een horizontale en in een verticale component waarmee we verder kunnen rekenen.

Er is een vector getekend die een hoek van 60° maakt met het horizontale vlak. Zie figuur 1. Deze vector is ontbonden in een horizontale component *a* en een verticale component *b*. Zie figuur 2. Hierdoor ontstaat de rechthoek *ABCD*. Zie figuur 3.

*Figuur 1*

*Figuur 2*

*c*

A

60

o

*b*

*a*

*c*

A

60

o

***vb. 1***

*Figuur 3*

*b*

*a*

*c*

A

B

C

D

60

o

We kunnen de lengte van *AB* en *AD* berekenen met de formules:

*AB*: *a* = *c* ⋅ cos60° en *AD* : *b* = *c* ⋅ sin60°

In het eerste kwadrant kunnen we een vector *c* (die een hoek α maakt met de horizontale as) ontbinden in een horizontale component *a* en een verticale component *b*. We gebruiken daarvoor de volgende formules:

› lengte horizontale component: *a* = *c* ⋅ cosα of *a c*= ⋅ cosα en

› lengte verticale component: *b* = *c* ⋅ sinα of *b c*= ⋅ sinα

***vb. 2Gegeven***

grijpt aan in *A*. Zie figuur 1. De grootte is 600N met een richting

*A* 60°.

***Gevraagd***

Bereken de horizontale component *a* en de verticale component *b*.

***Oplossing***

Lengte horizontale component: *a c*= ⋅ cosα ⇒ *a* = 600 × cos60° = 300N

Lengte verticale component: *b c*= ⋅ sinα ⇒ *b* = 600 × sin60° = 519,6 N

### oefeningen

***1***  Vector *c* grijpt aan in *A*. De grootte is 450N met een richting ∠*A* = 35°.

Gevraagd: bereken de horizontale component *a* en de verticale component *b*.

Vectoren kunnen we in poolcoördinaten of in rechthoekscoördinaten noteren. Dus

oefening 1 kunnen we als volgt noteren: *c*  N

*c* = (450∠35°) N is de notatie in poolcoördinaten en *c* = (368,6 ;258,1) N is de notatie in rechthoekscoördinaten.

De hiervoor behandelde methode werkt goed in het eerste kwadrant. In de overige kwadranten werkt deze methode minder eenvoudig. We gaan dan ook over op het ontbinden met onze rekenmachine.

We kunnen met onze rekenmachine op een eenvoudige manier poolcoördinaten omzetten in rechthoekscoördinaten.

***vb. 3***Reken *c* = (450∠35°) N om in rechthoekscoördinaten.



REC(



**~~,~~**



F



**~~,~~**



**,**



**)**



**,**



**)**



Met de CASIO fx-82MS:

Horizontale component 368,6

Verticale component

Met de TI-30X:

Horizontale component  R ↔ P PRx? 368,6

Verticale component  R ↔ P PRx? 258,1

Resultaat: *c* = (450∠35° N) = (368,6 ;258,1)N

De volgende opdrachten zullen we steeds uitwerken met de CASIO fx-82MS.

### oefeningen

1. Reken *c* = (550∠70°)N om in rechthoekscoördinaten.
2. Reken *c* = (400∠–45°)N om in rechthoekscoördinaten.

*c*

-45

o

*c*

-45

o

*Figuur 4a Figuur 4b*

*c*

-45

o

*Figuur 5*

*c*

-45

o

*Figuur 6*

1. Reken *c* = (340∠225°)N om in rechthoekscoördinaten.
2. Reken *c* = (600∠210°)N om in rechthoekscoördinaten.
3. Reken *c* = (500∠ –30°)N om in rechthoekscoördinaten.
4. Reken *c* = (500∠330°)N om in rechthoekscoördinaten.

Ook het omgekeerde, het omrekenen van rechthoekscoördinaten in poolcoördinaten, gaat eenvoudig met onze rekenmachine.

***vb. 4***Reken *c* = (300 ;600)N om in poolcoördinaten.

**Pol**

**(**



**~~,~~**



F

63

4

,°



**,**



**)**



**,**



Met de CASIO fx-82MS:

Grootte 670,8

Hoek

Met de TI-30X:

Grootte  R ↔ P R?Pr 670,8

Hoek  R ↔ P RP? 63, °4

Resultaat: *c* = (300 ;600)N = (670,8 63 4∠ , °)N

### oefeningen

1. Van een kracht *c* zijn de horizontale en verticale component gegeven:

› *a* = 300N en naar rechts gericht;

› *b* = 400N en naar boven gericht.

Bereken *c* in poolcoördinaten.

1. Van een kracht *c* zijn de horizontale en verticale component gegeven:

› *a* = 200N en naar links gericht;

› *b* = 600N en naar boven gericht.

Bereken de grootte en de richting van *c* .

## 2 SamenStellen van vectoren door berekening

Bij het grafisch samenstellen en ontbinden van vectoren hebben we de resultante van vectoren en krachten grafisch bepaald als de vectoren niet-gelijk- of tegengesteld gericht waren. Nu gaan we de grootte en de richting van de resultante van twee vectoren berekenen met behulp van hun horizontale en verticale componenten.

***vb. 5Gegeven***

*c*

2

*c*

1

A



Rec(



**~~,~~**



F

275

6

,

N



**~~,~~**



F

650

0

,N

*Figuur 7*

In punt A grijpen twee krachten *c*1 en *c*2 aan, die we gaan samenstellen tot één kracht*c*= (520N∠*c*32. Zie figuur 7. °); *c*2 = (660N∠80°)

1

***Gevraagd***Bereken *c* .

***Oplossing***

Voor *c*1 geldt:

Horizontale component: *a*1 : 441, N0

Verticale componenten: *b*1:

Voor *c*2 geldt:

Horizontale component: *a*2 : Rec( 114, N6

Verticale componenten: *b*2 : *at* = +*a*1 *a*2 = 441,0 + 114,6 = 555,6

*bt* = +*b*1 *b*2 = 275,6 + 650,0 = 925, N6

Tussenresultaat: *c* = (555,6 ;925,6)N

***vb. 5***Om ten slotte weer in poolcoördinaten om te rekenen, volgt met de CASIO fx-82MS:

**Pol**

**(**



**~~,~~**



**~~,~~**



**~~,~~**



F

59

°

Grootte: 1079, N5

Hoek:

Resultaat: *c* = (555,6 ;925,6)N = (1079,5 59∠ °)N

### oefeningen

1. In punt Agrijpen twee krachten *c*1 en *c*2 aan, die we gaan samenstellen tot één kracht*c*= (320*c* . Zie figuur 7.∠68°) N; *c*.

1

Gevraagd: bereken *c* in poolcoördinaten.

1. In punt A grijpentwee krachten *c*1 en *c*2 aan, die we gaan samenstellen tot één

kracht*c* . *c*1= (150∠120°)N en *c*2= (200∠45°)N. Bereken *c* in poolcoördinaten.

1. In punt A grijpentwee krachten *c*1 en *c*2 aan, die we gaan samenstellen tot één

kracht*c* . *c*1 = (500N ∠60°) en *c*2 = (600N ∠ 80°). Bereken *c* in rechthoekscoördinaten.

1. I n punt A grijpentwee krachten *c*1 en *c*2 aan, die we gaan samenstellen tot één

kracht*c* . *c*1 = (250N ∠30°) en *c*2 = (450N ∠20°).

Bereken *c* in poolcoördinaten.

1. In punt A grijpentwee krachten *c*1 en *c*2 aan, die we gaan samenstellen tot één

kracht*c* . *c*1 = (80N∠45°) en *c*2 = (60N ∠30°).

Bereken *c* in poolcoördinaten.

### antwoorden

1. *a* = 368, N6 ; *b* = 258, N1
2. *c* = (188,1 ;516,8)N
3. *c* = (282,8 ;–282, )8 N
4. *c* = (–240,4 ;–240,4)N
5. *c* = (–519, ;–6 300)N
6. *c* = (433 ;–250)N
7. *c* = (433 ;–250)N
8. *c* = (500∠53°) N
9. *c* = (632,5∠108,4°)N
10. *c* = (251 ;388, )5 N = (462,5 57∠ °) N
11. *c* = (66,4 ;271,3)N = (279,3 76 2∠ , °)N
12. *c* = (354,2 ;1033,9)N
13. *c* = (639,3 ;278,9)N = (697,6 21 8∠ , °)N
14. *c* = (108,6 86 6; , )N = (138,9 38 6∠ , °)N

Rekenkundig samenstellen en ontbinden van vectoren

**90**